Γενικές ασκήσεις 3^{ου} κεφαλαίου (σελ. 174)

1.

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 100\}$. Δίνονται και οι πιθανότητες $P(\kappa) = \frac{1}{2^{\kappa}}$, $\kappa = 1, 2, 3, \ldots, 100$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα P(0)

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $P(0) + P(1) + P(2) + \ldots + P(100) = 1$

Αλλά $P(1) = \frac{1}{2}$, $P(2) = \frac{1}{2^2}$, $P(3) = \frac{1}{2^3}$, ... , $P(100) = \frac{1}{2^{100}}$

Άρα $P(0) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{100}} = 1$ **(1)**

Η παράσταση $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{100}}$ είναι το άθροισμα των 100 πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$, που δίνεται από τον τύπο $S_{100} = \frac{\alpha_1(\lambda^{100} - 1)}{\lambda - 1}$

$$S_{100} = \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{100} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = -\left(\frac{1}{2^{100}} - 1\right) = 1 - \frac{1}{2^{100}}$$

(1) $\Rightarrow$ $P(0) + 1 - \frac{1}{2^{100}} = 1$ $\Rightarrow$ $P(0) = \frac{1}{2^{100}}$

2.

Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων και A , B υποσύνολα του Ω .
Υποθέτουμε ότι $P(A') \leq 0{,}28$ και $P(B') \leq 0{,}71$.
Να αποδείξετε ότι
i) $P(A \cap B) \geq 1{,}01 - P(A \cup B)$ και ii) $A \cap B \neq \varnothing$

Λύση

$P(A') \leq 0{,}28 \Rightarrow 1 - P(A) \leq 0{,}28 \Rightarrow P(A) \geq 0{,}72$ **(1)**

$P(B') \leq 0{,}71 \Rightarrow 1 - P(B) \leq 0{,}71 \Rightarrow P(B) \geq 0{,}29$ **(2)**

i)
Αρκεί να αποδείξουμε ότι $P(A \cap B) + P(A \cup B) \geq 1{,}01$

Από τον προσθετικό νόμο έχουμε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) \overset{(1),(2)}{\geq} 0{,}72 + 0{,}29$$

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) \geq 1{,}01$$

ii)

Αν υποθέσουμε ότι $A \cap B = \varnothing$, τότε $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$

(i) $\Rightarrow$ $0 \geq 1{,}01 - P(A \cup B)$

$P(A \cup B) \geq 1{,}01$ που είναι άτοπο , αφού η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου είναι ≤ 1 , επομένως